Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt (erschienen am 24.01.2022)

Aufgabe 12.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Seien $f, g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^T Ax + x^T Cy - d^T x \quad \text{und} \quad g(x,y) := \frac{1}{2}y^T By - y^T Cx + e^T y,$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische, positiv definite Matrizen seien, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $d, e \in \mathbb{R}^n$. Ein Vektor $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ heißt *Nash-Gleichgewicht*, falls gilt:

$$f(x^*, y^*) \le f(x, y^*) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

und

$$g(x^*, y^*) \le g(x^*, y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass genau ein Nash-Gleichgewicht existiert.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $z \in \mathbb{R}^k$ gilt:

  (i) Ist z ein lokales Minimum von h, dann gilt $\nabla h(z) = 0$.

  (ii) Ist $\nabla h(z) = 0$ und $\nabla^2 h(z)$ positiv definit, dann ist $h(z)$ ein striktes lokales Minimum von h.

(b) Berechnen Sie für $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben

$$\hat{x} := \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y),$$

sowie für $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben

$$\hat{y} := \arg\min_{y\in\mathbb{R}^n} g(x,y).$$

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$x^{(k+1)} := \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x, y^{(k)})$$

sowie

$$y^{(k+1)} := \arg\min_{y\in\mathbb{R}^n} g(x^{(k)}, y).$$

Formulieren Sie dies als Fixpunktiteration

$$\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad z^{(k+1)} := \Phi(z^{(k)})$$

und geben Sie eine allgemeine Bedingung an A, B, C an, die garantiert, dass das so definierte Fixpunktverfahren konvergiert.

Aufgabe 12.2 (Votieraufgabe)
Betrachtet wird die Fixpunktaufgabe $x = \Phi(x), x = (\xi, \eta)^T$, mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta + 3 \\ \log(1 + \eta^2 + \xi^2) - 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I = [0,1] \times [-1,1]$.

(a) Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit $q = \frac{5}{6}$ bezüglich der Maximumsnorm nach.

(b) Es seien $x^{(k)}$ die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ mit Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^T$ und $\hat{x}$ bezeichne den Fixpunkt von Φ auf I. Wieviele Iterationsschritte sind hinreichend, um

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-3}$$

garantieren zu können?

Aufgabe 12.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Implementieren Sie die Fixpunktiteration aus Aufgabe 2 in `MATLAB`. Das Verfahren soll abbrechen, sobald

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$$

für $N \in \mathbb{N}$. Realisieren Sie diese Abbruchsbedingung jeweils mit

- der a-priori Schranke aus Satz 3.1 (b),
- der a-posteriori Schranke aus Satz 3.1 (c),

wobei als Startwert $x^{(0)} = (0,-1)^\mathsf{T}$ gewählt werden soll. Das Verfahren soll dabei den Iterationsverlauf und die benötigte Anzahl an Iterationen ausgeben. Testen Sie ihr Verfahren für $N = 1, 2, \ldots, 10$ und plotten Sie die Anzahl der benötigten Iterationen über N. Was können Sie beobachten? Warum?
Anmerkung: Dass der Fehler $\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$ ist, bedeutet anschaulich gerade, dass $x^{(k)}$ schon $N-1$ richtige Nachkommastellen von $\hat{x}$ besitzt.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 01.02.2022 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 01.02.2022 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**