GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

11. Übungsblatt (erschienen am 17.01.2022)

Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]
Sei $a > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Betrachtet wird die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}\right).$$

Zeigen Sie, dass diese für jeden Startpunkt $x^{(0)} \in (0, \infty)$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 11.2 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]
Es sei $t \mapsto M(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine stetige Funktion, t, $t_0 \in \mathbb{R}$, wobei $M(t)$ nicht notwendigerweise regulär ist. Beweisen Sie:

(a) Sei $n = m$ und die Matrix $M(t_0)$ sei regulär. Dann existiert eine Umgebung U von t_0, sodass die Matrix $M(t)$ für alle $t \in U$ regulär ist.

(b) Sei nun $n \neq m$. Dann existiert eine Umgebung U von t_0, sodass

$$\operatorname{Rang}(M(t)) \geq \operatorname{Rang}(M(t_0))$$

für alle $t \in U$ gilt. Der Rang der Matrix M kann lokal also nicht kleiner werden.

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Determinanten von $M(t)$ bzw. einer geeigneten Teilmatrix von $M(t)$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass die Determinantenabbildung stetig ist.

Aufgabe 11.3 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]
Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine quadratische Matrix und $\rho(A) := \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$, der Spektralradius von A mit den Eigenwerten λ_i für $i = 1, ..., n$.

Zeigen Sie: Für eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist der Spektralradius die natürliche Matrixnorm zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$, d. h.

$$(\|A\|_2 =) \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \rho(A).$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass es für symmetrische bzw. hermitesche Matrizen ein Orthonormalsystem $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gibt, und dass $|\lambda| \leq \|A\|$ für alle Eigenwerte λ von A und jede verträgliche Matrixnorm gilt.

Bemerkung: Für allgemeine Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n,m}$ ist die Spektralnorm $\|A\|_S := \sqrt{\rho(A^*A)}$ die natürliche Matrixnorm zur euklidischen Norm in $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$.

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
[Aplus] = Moore_Penrose(A),
```

welche zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Moore-Penrose Inverse A^+ bestimmt. Dazu darf der MATLAB-Befehl `eig` verwendet werden, der MATLAB-Befehl `svd` soll **nicht** verwendet werden. Testen Sie ihre Funktion für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie ihr Ergebnis.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass zur Bestimmung der Moore-Penrose Inverse die Anteile von U aus $\mathcal{N}(A^*)$ nicht benötigt werden.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 25.01.2022 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 25.01.2022 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**