

10. Übungsblatt (erschienen am 10.01.2022)

Aufgabe 10.1 (Votieraufgabe)

- (a) Sei $\|\cdot\|_*$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|_*$ die davon induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass für jede reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ durch $\|x\|_S := \|Sx\|_*$, für $x \in \mathbb{C}^n$, eine Vektornorm definiert wird und $\|A\|_S := \|SAS^{-1}\|_*$ die zugehörige induzierte Matrixnorm ist.
- (b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Weisen Sie nach, dass der *Spektralradius* $\rho(A)$,

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

im Allgemeinen keine Matrixnorm ist

- (c) Zeigen Sie, dass zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Spektralradius $\rho(A)$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_*$ existiert mit $\|A\|_* < \rho(A) + \varepsilon$.
Hinweis: : Verwenden Sie Teil (a) mit $S := D^{-1}V^{-1}$, wobei $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so gewählt sei, dass $V^{-1}AV$ Jordan-Normalform besitzt, und

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Aufgabe 10.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Bestimmen Sie bitte, mithilfe von Householder-Transformationen, die QR-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A . Wir zerlegen $Q = (Q_1, Q_2)$ mit $Q_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $Q_2 \in \mathbb{C}^{m \times (m-n)}$. Zeigen Sie bitte:

- (a) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q_1)$.
- (b) Die Spalten von Q_1 bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{R}(A)$.
- (c) Die Spalten von Q_2 bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{N}(A^*)$.

Aufgabe 10.4 (Schriftliche- und Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion $[QR]=QR_decomp(A)$, welche die QR-Zerlegung einer injektiven Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ realisiert.

Testen Sie Ihr Programm an den Beispielen aus 10.2 und 9.4.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 18.01.2022 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 18.01.2022 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.