

9. Übungsblatt (erschienen am 13.12.2021)

Aufgabe 9.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Beweisen Sie bitte Satz 2.25 aus der Vorlesung:

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $A^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$ die Moore-Penrose Inverse.

(a) $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$.

(b) A^+ erfüllt die Moore-Penrose Axiome

$$AA^+A = A, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^* = A^+A.$$

(c) A^+ besitzt die Singulärwertzerlegung

$$A^+u_j = \sigma_j^{-1}v_j, \quad (A^+)^*v_j = \sigma_j^{-1}u_j.$$

Aufgabe 9.2 (Votieraufgabe)

Unter der Spur(B) einer Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ versteht man die Summe aller Diagonalelemente von B .

(a) Zeigen Sie, dass die Spur invariant unter Basistransformationen ist, d.h. für $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar gilt

$$\text{Spur}(T^{-1}BT) = \text{Spur}(B).$$

(b) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$\|A\|_F^2 = \text{Spur}(A^*A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A^*A)} \lambda$$

gilt, wobei $\sigma(A^*A)$ das Spektrum von A^*A bezeichnet.

(c) Zeigen Sie bitte:

(i) $\text{cond}_2(U) = 1$ für alle unitären Matrizen U .

(ii) $\text{cond}_2(A) \leq \text{cond}_F(A) \leq n \cdot \text{cond}_\infty(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar.

(iii) $\text{cond}_2(UA) = \text{cond}_2(A)$ für alle unitären Matrizen U und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar.

Aufgabe 9.3 (Votieraufgabe)

Betrachten Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|_2 \tag{1}$$

mit einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{C}^m$. Für ein $\rho_k > 0$ sei x_k die Lösung der regularisierten Normalgleichung

$$(A^*A + \rho_k I)x = A^*b.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix $A^*A + \rho_k I$ für jedes $\rho_k > 0$ invertierbar ist und dass $x_k \rightarrow A^+b$ für $\rho_k \rightarrow 0+$.

Aufgabe 9.4 (Rettet den Weihnachtsbaum - Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Laden Sie sich das mat-file „Weihnachtsbaum.mat“ von der Veranstaltungshomepage herunter. Mit Hilfe des MATLAB-Befehls `load` können Sie dieses in MATLAB extrahieren. Es enthält eine Matrix A und einen Vektor y . Betrachten Sie nun das folgende Problem:

Oh nein! Der Weihnachtsbaum x wurde von der hinterlistigen Matrix A verwischt und ist nun im Vektor $y \approx Ax$ gefangen. Aber bald ist Weihnachten! Können wir den Baum noch retten?

Retten Sie den Weihnachtsbaum! Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (i) Versuchen Sie zunächst, den Baum durch Lösung der Gaußschen Normalgleichungen mit Hilfe der LR-Zerlegung sowie der Cholesky-Zerlegung zu retten.
- (ii) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Ergebnis von `[Q,R]=qr(A); x=R\ (Q'*b)`; (Diese sogenannte QR-Zerlegung wird in den nächsten Vorlesungen eingeführt werden.) Den Weihnachtsbaum können Sie dazu mit der unten angegebenen MATLAB-Funktion `Zeichne_Baum` plotten. Vergleichen Sie auch die jeweiligen Laufzeiten.

```
function Baum = Zeichne_Baum(x)
% Visualisiert das Ergebnis x des linearen Ausgleichproblems aus Aufgabe 9.4.
Baum = uint8(reshape(x,16,16,3));
imshow(Baum);
end
```

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 11.01.2021 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 11.01.2021 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.