

8. Übungsblatt (erschienen am 06.12.2021)

Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)

- (a) Gegeben seien endlich viele Messdaten $t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$. Es wird vermutet, dass die Daten x_i in folgender Weise von den Daten t_i abhängen:

$$x(t) = \alpha_0 t^2 + \alpha_1 \pi \sin(2t) + \alpha_2 t \log(t) + \alpha_3,$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Geben Sie das lineare Ausgleichsproblem zur näherungsweise Bestimmung der Koeffizienten α_i an.

- (b) Gehen Sie nun analog für einen vermuteten linearen Zusammenhang $x = at + b$ vor, und bestimmen Sie so die Ausgleichsgerade durch die folgenden Datenpunkte:

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	3.72	4.1	5.37	5.9	6.8	7.6	8.0	8.7

Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Ausgleichsgerade.

Aufgabe 8.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine gegebene Matrix mit $\text{Rang}(A) = n$. Zeigen Sie:

- (a) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$$

ist regulär.

- (b) $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|$$

mit dem Residuum $\hat{r} = b - A\hat{x}$, wenn (\hat{r}, \hat{x}) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

löst.

Aufgabe 8.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Betrachtet wird die in Abbildung 1 dargestellte Anordnung von Federn und Kugeln.

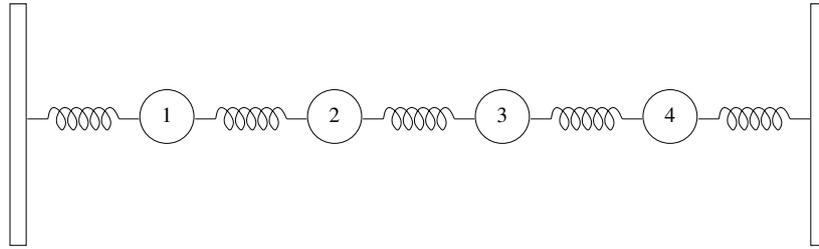


Abbildung 1: Anordnung von Federn und Kugeln.

Bezeichne x_i , $i = 1, \dots, 4$, die Auslenkung der i -ten Kugel aus der Ruhelage nach rechts und v_i ihre Geschwindigkeit, wobei $v_i > 0$ eine Bewegung nach rechts bedeutet. Durch die Federkräfte ändert sich im Zeitraum Δt beispielsweise die Geschwindigkeit der zweiten Kugel gemäß

$$v_2^{\text{neu}} = v_2^{\text{alt}} + \Delta v_2 \quad \text{mit} \quad \Delta v_2 = k(x_1 - x_2)\Delta t + k(x_3 - x_2)\Delta t,$$

wobei k von der Stärke der Feder und der Masse der Kugel abhängt und hier als konstant angenommen wird. Die Position der zweiten Kugel ändert sich gemäß

$$\Delta x_2 = x_2^{\text{neu}} - x_2^{\text{alt}} = v_2 \Delta t.$$

Stellen Sie für die anderen Kugeln entsprechende Gleichungen für Δx_i und Δv_i auf und fassen Sie diese in einem linearen Gleichungssystem der Form

$$\Delta \eta = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta x_4 \\ \Delta v_4 \end{pmatrix} = \Delta t A \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \Delta t A \eta, \quad A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}, \quad (1)$$

zusammen. Zur Berechnung von

$$\eta^{\text{neu}} = \eta^{\text{alt}} + \Delta \eta$$

kann in der rechten Seite von (1) entweder η^{alt} oder η^{neu} verwendet werden. Im zweiten Fall muss die Gleichung dann noch nach η^{neu} aufgelöst werden. Dazu sollte einmalig eine LR-Zerlegung der zu invertierenden Matrix mit dem MATLAB-Befehl `lu` berechnet werden, und die Lösungen sukzessiv wie in der Vorlesung in Bemerkung 2.3 beschrieben berechnet werden.

Implementieren und testen Sie beide Möglichkeiten für jeweils 300 Zeitschritte mit $\Delta t = 0.05$ und Anfangsvorgabe $\eta = (0.3, 0, -0.3, 0, 0.3, 0, -0.3, 0)^T$ und $k = 1$. Plotten Sie in einem Plot jeweils x_1 und x_2 abhängig von der Zeit.

Zusätzlich können Sie die zeitliche Entwicklung mit der unten angegebenen Funktion `Zeichne(eta)` visualisieren, indem Sie diese in jedem Zeitschritt aufrufen (hierzu ist nichts abzugeben).

```
function Zeichne(eta)
figure(1); set(gcf,'Color','w'); clf; axis([-0.5 10.5 -2 2]);
axis equal; hold on; axis tight; axis off;
[x01,y01]=MaleFeder(0,2+eta(1));
[x12,y12]=MaleFeder(2+eta(1),4+eta(3));
[x23,y23]=MaleFeder(4+eta(3),6+eta(5));
```

```

[x34,y34]=MaleFeder(6+eta(5),8+eta(7));
[x45,y45]=MaleFeder(8+eta(7),10);
plot([x01, x12, x23, x34, x45],[y01, y12, y23, y34, y45]);
patch([-0.2 0 0 -0.2],[-1 -1 1 1],'r');
patch([10.2 10 10 10.2],[-1 -1 1 1],'r');
plot([2,4,6,8]+eta([1,3,5,7]),zeros(1,4),'o','MarkerSize',20,...
    'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','r');
end

```

```

function [x,y]=MaleFeder(a,b)
x=[a linspace(a+0.35,b-0.35,10) b];
y=[0 0 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0 0]/5;
end

```

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 14.12.2021 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 14.12.2021 um 08:00 Uhr ein **kommentierter MATLAB-Quellcode** zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.