Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
6. Dezember 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei K ein Körper und $d \in \mathbb{N}$. Wir erinnern an den Untervektorraum $K[X]_d := \{f \in K[X] : \deg(f) \leq d\} \subset K[X]$ mit der Basis $\{1, X, \ldots, X^d\}$. Sei $a \in K$ und $E_a \colon K[X] \to K$, $\sum_{i=0}^n b_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n b_i a^i$ die zugehörige Auswertungsabbildung. Sei $U_d(a) := \{f \in K[X]_d : E_a(f) = 0\} \subset K[X]_d$.

(a) Zeigen Sie: $U_d(a)$ ist ein Untervektorraum und bestimmen Sie $\dim U_d(a)$.

(b) Sei V ein Komplement zu $U_d(a)$ in $K[X]_d$. Bestimmen Sie $\dim V$ durch Angabe einer Basis.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Elementen aus V linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder eine Basis bilden.

(a) $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n)$;

(b) $(v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + \cdots + v_n)$.

Ergänzen Sie jeweils die linear unabhängigen Tupel, die noch keine Basis bilden, zu einer Basis von V.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit geordneter Basis $B := (v_1, \ldots, v_n)$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix Θ_{BC} für

(a) $C := (v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + \cdots + v_n)$ und

(b) $C := (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$ für ein $\sigma \in S_n$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_n \subseteq V$ endlichdimensionale Unterräume. Zeigen Sie:

(a) $\dim(U_1 + \cdots + U_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \dim\big((U_1 + \cdots + U_k) \cap U_{k+1}\big) = \sum_{k=1}^{n} \dim U_k.$

(b) Ist $n = 3$, so gilt:

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_3)$$
$$\leq \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$.

Finden Sie ein Beispiel für U_1, U_2, U_3, so dass die Ungleichung strikt ist, d.h. keine Gleichheit gilt.

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 13. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.