

6. Übungsblatt (erschienen am 22.11.2021)

Aufgabe 6.1 (Votieraufgabe)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm in \mathbb{C}^n . Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\|A\|_{\text{ind}} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

wird eine Matrixnorm in $\mathbb{C}^{n \times n}$, die sogenannte *induzierte Norm* definiert.

(b) Die induzierte Norm ist mit der Ausgangsnorm verträglich und submultiplikativ (Definition 2.7).

(c) Für jede andere mit der Ausgangsnorm verträgliche Norm $\|\cdot\|_{\text{vertr}}$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

$$\|A\|_{\text{ind}} \leq \|A\|_{\text{vertr}} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Aufgabe 6.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Zeigen Sie:

(a) Die Spaltensummennorm ist die durch die Betragssummennorm induzierte Norm.

(b) Die Zeilensummennorm ist die durch die Maximumsnorm induzierte Norm.

(c) Die Frobeniusnorm ist mit der Euklid-Norm verträglich, jedoch wird die Frobeniusnorm nicht durch die Euklid-Norm induziert.

(d) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ reguläre Matrizen und $\|\cdot\|_M$ eine Matrixnorm. Zeigen Sie:

(i) $\text{cond}_M(AB) \leq \text{cond}_M(A) \cdot \text{cond}_M(B)$ für jede submultiplikative Matrixnorm.

(ii) $\text{cond}_M(cA) = \text{cond}_M(A)$ für alle $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 6.3 (Votieraufgabe)

Berechnen Sie bitte für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 6 \\ -4 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

von Hand die LR-Zerlegung. Geben Sie den Rechenweg vollständig an.

Aufgabe 6.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Implementieren Sie die LR-Zerlegung ohne Pivotsuche in MATLAB, sowie die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Testen Sie das Verfahren anhand der Gleichungssysteme $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 6 \\ -4 & -5 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen und interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 30.11.2021 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 30.11.2021 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.