

5. Übungsblatt (erschienen am 15.11.2021)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

Eine m -punktige Quadraturformel

$$G_m[f; w] := \sum_{i=1}^m w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) w(x) dx,$$

mit Knoten $x_1 < x_2 < \dots < x_m \in [a, b]$ heißt m -stufige Gauß-Formel zu der Gewichtsfunktion w genau dann, wenn $G_m[\cdot; w]$ den Exaktheitsgrad $2m - 1$ hat. In der Vorlesung wurden die Gauß-Legendre Quadraturformeln zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $\int_{-1}^1 f(x) dx$ besprochen. Seien nun $w_i^{[-1,1]}$ und $x_i^{[-1,1]}$ die Gewichte und Knoten dieser in der Vorlesung hergeleiteten Gauß-Formel zum Intervall $[-1, 1]$ und Gewichtsfunktion $w(x) = 1$. Wie lauten die Gewichte und Knoten der Gauß-Formel zu einem allgemeinen Intervall $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, mit Gewichtsfunktion $w(x) = 1$?

Aufgabe 5.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Aus der Vorlesung und den Übungen kennen Sie bereits die Gauß-Formeln zu $w \equiv 1$ (Gauß-Legendre-Formel) und $w = (1 - x^2)^{-1/2}$ (Gauß-Tschebyscheff-Formel).

- (a) Bestimmen Sie die Knoten und die Gewichte der zweistufigen Gauß-Formel zur näherungsweisen Berechnung von

$$I[f; 1 - x] = \int_0^1 f(x)(1 - x) dx.$$

- (b) Konstruieren Sie eine Quadraturformel zur Approximation des Integrals $\int_{\Delta} f(x, y) dx dy$ einer Funktion f über dem Dreieck $\Delta := \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1, x + y \leq 1\}$.

Verwenden Sie dazu den Satz von Fubini und approximieren Sie anschließend zunächst das innere und dann das äußere Integral durch geeignete zweipunktige Gauß-Formeln. Verwenden Sie dabei auch den Aufgabenteil (a).

Aufgabe 5.3 (Votieraufgabe)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n, f \in C([a, b])$, $a < b$. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f .

- (a) Es sei $Q_m[f] = \sum_{i=1}^m w_i f(x_i)$ eine Quadraturformel zur Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$ mit positiven Gewichten w_i . Die Gewichte seien gemäß Satz 1.9, Vorlesungsskript, bestimmt. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| Q_m[f_n - f] \right| \leq |b - a| \cdot \|f_n - f\|_{[a,b]}.$$

- (b) Man beweise, dass für jede Quadraturformel $Q[\cdot]$ gilt:

$$Q[f_n] \rightarrow Q[f] \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

- (c) Zeigen Sie mit dem Approximationssatz von Weierstraß, dass jede Quadraturformel $Q_m[\cdot]$ mit positiven Gewichten w_i , welche entsprechend Satz 1.9, Vorlesungsskript, bestimmt sind, konvergiert:

$$Q_m[f] \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Aufgabe 5.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

- (a) (Golub-Welsh Algorithmus) Implementieren Sie den Golub-Welsh Algorithmus zur numerischen Berechnung von

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

entsprechend Satz 1.26 aus der Vorlesung. Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A kann die MATLAB-Funktion $[V,D] = \text{eig}(A)$ verwendet werden. Approximieren Sie damit $\int_{-1}^1 \sin(\frac{7}{4}\pi x + \frac{1}{4}\pi) dx$ für $m = 5, 10, 15$ Stützstellen und geben Sie den absoluten Fehler aus.

- (b) (Monte-Carlo Verfahren) Es soll eine einfache Version des Monte-Carlo Verfahrens zur numerischen Approximation von $\int_a^b f(x) dx$ implementiert werden, und zwar die Quadraturformel

$$Q[f] = \frac{(b-a)}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i)$$

mit „gewürfelten“ Stützstellen x_i . Genauer sollen die x_i gleichverteilt auf dem Integrationsintervall $[a, b]$ liegen. Dies kann in MATLAB mithilfe der MATLAB-Funktion `rand` realisiert werden. Geben Sie einen doppelt-logarithmischen Plot aus, der den absoluten Fehler für das Integral $\int_{-1}^1 \sin(x) dx$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen ($n = 100$ bis $n = 10000$, in 100er Schritten) ausgibt, und tragen Sie den Graph der Funktion $f(n) = 1/\sqrt{n}$ im selben Plot auf.

- (c) Vergleichen Sie den Golub-Welsh Algorithmus, das zusammengesetzte Trapezverfahren und das Monte-Carlo Verfahren anhand des Integrals $\int_{-1}^1 \sin(\frac{7}{4}\pi x + \frac{1}{4}\pi) dx$. Stellen Sie dazu den absoluten Integrationsfehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen dar.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 23.11.2021 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 23.11.2021 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.