Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
15. November 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$. Dann definieren wir die *transponierte Matrix* als $A^t := (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

(a) Seien $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,l}(K)$. Zeigen Sie: $(AB)^t = B^t A^t \in \mathrm{Mat}_{l,n}(K)$.

(b) Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform und schreiben Sie diese als Produkt von A mit Elementarmatrizen.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$. Ist $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Für $t \in \mathbb{C}$ sei $A_t \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t^5 \\ 5 & 0 & 5t^2+5 & 10t \\ 16 & 0 & 32t^2+32 & -32t^3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie A_t mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A_t \cdot x = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Matrizen in der Menge

$$Z := \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid \forall B \in \mathrm{Mat}_n(K) : AB = BA\}.$$

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 22. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.