

Aktualisiertes 2. Übungsblatt (erschienen am 25.10.2021)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die Vandermonde Matrix

$$V_m := \begin{pmatrix} x_1^0 & \dots & x_1^{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

gilt, dass $\det(V_m) = \prod_{1 \leq j < k \leq m} (x_k - x_j)$, wobei nach Konvention $\prod_{1 \leq j < k \leq 1} = 1$.

Aufgabe 2.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Die *Hermite-Interpolationsaufgabe* besteht darin, zu vorgegebenen Knoten x_1, \dots, x_m neben Funktionswerten $f(x_1), \dots, f(x_m)$ auch die Werte der Ableitung $f'(x_1), \dots, f'(x_m)$ miteinzubeziehen. Wir wollen ein Polynom p vom Grad $2m - 1$ so bestimmen, dass

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{und} \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m \quad \text{gilt.}$$

- (a) Zeigen Sie, dass höchstens ein solches Polynom $p \in \Pi_{2m-1}$ existiert.
(b) Konstruieren Sie die Polynome $q_i, r_i \in \Pi_{2m-1}$ mit den Eigenschaften

$$q_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad q_i'(x_j) = 0, \tag{1}$$

$$r_i(x_j) = 0, \quad r_i'(x_j) = \delta_{ij}, \tag{2}$$

für $i, j = 1, \dots, m$ und geben Sie damit die Lösung der Hermite-Interpolationsaufgabe explizit an. Zeigen Sie dazu, dass die Polynome

$$q_i(x) = (\alpha_i x + \beta_i) l_i^2(x) \quad \text{und} \quad r_i(x) = (\tilde{\alpha}_i x + \tilde{\beta}_i) l_i^2(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ die Bedingungen (1) bzw. (2) erfüllen; hierbei sind l_i die Lagrange-Grundpolynome. Berechnen Sie die Koeffizienten $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ ohne die Ableitung der Lagrange-Grundpolynome explizit auszurechnen.

- (c) Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom für $x_1 = 0, x_2 = \pi/2, p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2)$ sowie $p'(x_1) = f'(x_1), p'(x_2) = f'(x_2)$ mit $f(x) = \cos x$.

Aufgabe 2.3 (Votieraufgabe)

Seien $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_2', y_3 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2 < x_3$.

- (a) Existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \Pi_1$, mit $p(x_1) = y_1$ und $p'(x_2) = y_2$?
(b) Existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \Pi_1$, mit $p'(x_1) = y_1$ und $p'(x_2) = y_2$?
(c) Existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \Pi_2$, mit $p(x_1) = y_1, p(x_3) = y_3$ und $p'(x_2) = y_2'$?

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

- (a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die eine Funktion für äquidistante Stützstellen $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ und vorgegebene Funktionswerte $f(x_1), \dots, f(x_m)$ auf dem Intervall $[x_1, x_m]$ mittels eines Polynomes vom Grade $m - 1$ interpoliert. Verwenden Sie die Vandermonde Matrix um die Koeffizienten des Polynoms auszurechnen.

Hinweis: Ein Gleichungssystem $Ax = b$ löst MATLAB mit dem Befehl $\mathbf{x} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$, siehe auch `help \` in MATLAB.

- (b) Interpolieren Sie die Funktionen `exp`, `sin` auf dem Intervall $[-5, 5]$ jeweils mit Polynomen vom Grad 5 und 10. Geben Sie jeweils die Interpolationspolynome und den Graph der zu interpolierenden Funktion in einem einzigen Plot aus.

Hinweis: Die MATLAB-Funktion `polyval` ist hier hilfreich.

- (c) Was beobachtet man, wenn man das Interpolationspolynom zu $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ auf dem Intervall $[-5, 5]$ für verschiedene Anzahlen von Stützstellen darstellt?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 02.11.2021 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 02.11.2021 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.