GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

1. Übungsblatt (erschienen am 18.10.2021)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge und x_0 ein Häufungspunkt von X ($x_0 = \infty$ und $x_0 = -\infty$ seien zugelassen). Weiterhin seien f, $g\colon X \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die *Landauschen Symbole* $\mathrm{O}(\cdot)$ und $\mathrm{o}(\cdot)$ seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
f \in \mathrm{O}(g) \quad &\text{falls} \quad \limsup_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty,\\
&\text{d.h. } \exists\, C > 0 : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C, \text{für alle } x \in X \text{ hinreichend nahe bei } x_0,\\
f \in \mathrm{o}(g) \quad &\text{falls} \quad \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0.
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass in der Literatur auch die Schreibweise „$f = \mathrm{O}(g)$“ bzw. „$f = \mathrm{o}(g)$“ üblich ist, obwohl dies keine Äquivalenzrelation ist.

(a) Es seien $h_1 \in \mathrm{O}(f)$, $h_2 \in \mathrm{O}(g)$, $h_3 \in \mathrm{o}(f)$, jeweils für $x \to x_0$, und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Regeln:

  (i) $h_1 + h_2 \in \mathrm{O}(|f| + |g|)$.
  (ii) $c \cdot h_1 + h_3 \in \mathrm{O}(f)$.
  (iii) $h_2 \cdot h_3 \in \mathrm{o}(f \cdot g)$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

  (i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f \in \mathrm{O}(x^{k+1}) \iff f \in \mathrm{o}(x^k)$, für $x \to 0$.
  (ii) $f \in \mathrm{O}(n^n) \iff f \in \mathrm{O}(n!)$, für $n \to \infty$.
  (iii) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in e + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, für $n \to \infty$.

Aufgabe 1.2 (schriftliche Aufgabe)[3+3 Punkte]

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Trapezformel eine obere Schranke für $\int_a^b f(x)dx$ liefert.

(b) Zeigen Sie, dass die Mittelpunktsformel eine untere Schranke für $\int_a^b f(x)dx$ liefert.

Aufgabe 1.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion, die das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

mithilfe der zusammengesetzten Trapezformel für eine vorgegebene Schrittweite h approximiert. Berechnen Sie die Approximationen an das Integral für $h = 10^{-2}$ und $h = 10^{-1}$.

(b) Erweitern Sie ihre `MATLAB`-Funktion, sodass sie einen zweidimensionalen Plot ausgibt, welcher den Integrationsfehler gegen die Schrittweite h darstellt. Zur Berechnung des exakten Integralwertes kann die `MATLAB`-Funktion `erf` verwendet werden. Versuchen Sie, durch Vektorisierung mit möglichst wenig Schleifen auszukommen. Verwenden Sie außerdem die doppelt-logarithmische (log-log) Darstellung. Welchen Schluss lässt diese Darstellung zu?

(c) Verändern Sie ihre `MATLAB`-Funktion, sodass die zu integrierende Funktion als Argument im Funktionsaufruf übergeben werden kann. Schlagen Sie dazu die `MATLAB`-Hilfe unter dem Stichwort `function_handle` nach oder nutzen Sie die `MATLAB`-Funktion `feval`.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 26.10.2021 um 08:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 26.10.2021 um 08:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

---

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__