Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

4. Übungsblatt (erschienen am 26.05.2021)

Aufgabe 4.1 (Programmieraufgabe [6 Punkte])

Ziel dieser Aufgabe ist es, ein Problem der Optik zu imitieren. Bei Aufnahmen von Objekten mit scharfen Kanten ist aufgrund der Linsenstruktur von Kameras ein Weichzeichnen (sog. Blurring) zu beobachten. Wir simulieren dieses Verhalten dadurch, dass jeder Wert des ursprünglichen Bildes mit Hilfe der Gauß'schen Glockenkurve verwischt wird.
Wir nehmen dazu an, dass ein kontinuierliches (einfarbiges) Bild durch eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschrieben werden kann, wobei $v(x)$ die Intensität an der Position $x \in \mathbb{R}^2$ sei. Das weichgezeichnete Bild v_{blur} ergibt sich dann aus dem scharfen Bild v_{scharf} durch

$$v_{\text{blur}}(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^2} k(x-y) v_{\text{scharf}}(y) \, \mathrm{d}y,$$

wobei die Kernfunktion k die zweidimensionale Gauß'sche Glockenkurve mit Standardabweichung $\sigma > 0$ sei,

$$k(z) := \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|z\|^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2.$$

Im Rechner liegen (einfarbige) Bilder diskretisiert als Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vor. Jedes Element $a_{ij} \in \mathbb{R}$ gibt die Intensität des (i,j)-ten Pixels im Bild an der Stelle (i,j) an.

(a) Schreiben Sie eine Funktion $B = blur(A)$, die Ihnen eine mit der Gauß'schen Glockenkurve weichgezeichnete Version $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eines diskreten Bildes $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ berechnet. Diskretisieren Sie dazu die obige Integralgleichung.

Testen Sie Ihr Programm für verschiedene σ an selbst erstellten scharfen Bildern (z.B. einzelnen Punkten oder Flächen unterschiedlicher Intensität), sowie an dem in Matlab bereitgestellten Bild `A = im2double(imread('cameraman.tif'));`.

Mit dem Befehl `imshow(A)` können Sie ein Bild anzeigen lassen.

(b) Die Weichzeichnung ist offensichtlich linear. Konstruieren Sie die zugehörige Matrix $F \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$, so dass $Fa = b$, wobei die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^{nm}$ die (spaltenweise ausgelesenen) Einträge von $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B =$ `blur(A)` $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ enthalten.
Tipp: Erzeugen Sie F mit einem Matlab-Programm, dass Ihren Weichzeichner auf Basisbilder anwendet, in denen jeweils nur ein Pixel eingefärbt ist. Sammeln Sie die Ergebnisbilder als Vektoren formattiert spaltenweise in einer Matrix.

(c) Nutzen Sie die Matrix F um ein Beispielbild erst zu verwischen (blurring) und dann durch Anwendung von F^{-1} wieder zu schärfen (sog. deblurring).

Simulieren Sie dann die Tatsache, dass Sie das verwischte Bild nicht exakt kennen, indem Sie kleine Zufallszahlen auf die Matrix-Einträge addieren. Können Sie auch ein so verrauschtes Bild durch Anwendung von F^{-1} wieder schärfen?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 07.06.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Fortgeschrittene Optimierung und inverse Probleme* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.